MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 7
4.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. Es handelt sich bei

$$y' = 2x \cdot \tan y \,, \qquad y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\qquad\qquad (*)$$

um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2x, \quad \text{und} \quad g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \tan y.$$

Die Funktion g ist sogar stetig differenzierbar, also ist die Bedingung ii) aus 2.8 erfüllt und es gibt nach 2.8 zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Zunächst liefert die Nullstelle $y_1 = 0$ von g die konstante Lösung

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 0,$$

und eine Lösung φ kann, wegen der Eindeutigkeit, keinen Punkt mit φ_1 gemeinsam haben (also $G_\varphi \cap G_{\varphi_1} = \varnothing$); es gilt also entweder

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0.$$

<u>1. Fall:</u> Wir betrachten die DGL

$$y' = 2x \cdot \tan y \,, \qquad y \in]0, \frac{\pi}{2}[\qquad\qquad (*_1),$$

trennen die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x \tan y \\
\int \frac{1}{\tan y} dy &= \int 2x \, dx \\
\int \frac{\cos x}{\sin y} dy &= \int 2x \, dx \\
\ln|\sin y| &= x^2 + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}\text{)} \\
|\underbrace{\sin y}_{>0}| &= e^{x^2+c} \\
\sin y &= e^{x^2+c} \\
y &= \arcsin(e^{x^2+c})
\end{aligned}$$

Da $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, ist $0 < \sin y < 1$, also muß $e^{x^2+c} < 1$, und damit $x^2 + c < 0$, also $x^2 < -c$ gelten. Folglich gibt es Lösungen nur für $c < 0$, und die maximalen Lösungen von $(*_1)$ sind also

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arcsin(e^{x^2+c}), \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}, c < 0,$$

und dem maximalen Definitionsbereich

$$D_\varphi =]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\,[.$$

2. Fall: Wir betrachten die DGL

$$y' = 2x \cdot \tan y\,, \qquad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\,, \qquad\qquad (*_2)$$

trennen die Variablen und formen äquivalent um. Es ergibt sich wie im 1. Fall für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \tan y \\ &\vdots \\ |\underbrace{\sin y}_{<0}| &= e^{x^2+c} \\ -\sin y &= e^{x^2+c} \\ \sin y &= -e^{x^2+c} \\ y &= \arcsin(-e^{x^2+c}) \end{aligned}$$

Da $y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, ist $-1 < \sin y < 0$, also muß $-1 < -e^{x^2+c}$, und damit $1 > e^{x^2+c}$, also $x^2 + c < 0$, also $x^2 < -c$ gelten. Folglich gibt es auch hier Lösungen nur für $c < 0$, und die maximalen Lösungen von $(*_2)$ sind also

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arcsin(-e^{x^2+c}), \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}, c < 0,$$

und dem maximalen Definitionsbereich

$$D_\varphi =]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\,[.$$

Zusammenfassung:
Alle maximalen Lösungen sind also:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0, \\ \varphi :]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\,[&\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arcsin(e^{x^2+c}), \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}, c < 0, \\ \varphi :]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\,[&\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \arcsin(-e^{x^2+c}), \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}, c < 0. \end{aligned}$$

2. Bei

$$y' = -2\sqrt{y}, \quad y \geq 0, \qquad\qquad (*)$$

handelt essich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = -2, \quad \text{und} \quad g : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \sqrt{y}.$$

Man beachte, daß hier die Bedingungen i) (g nicht nullstellenfrei) und ii) (g nicht stetig differenzierbar) aus 2.8 **nicht** erfüllt sind, eine eindeutige Lösbarkeit des AWP ist also nicht garantiert (und hier auch nicht gegeben).

Zunächst liefert die Nullstelle $y = 0$ von g die konstante Lösung

$$\varphi : [0, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0,$$

die wegen $\varphi(1) = 0$ auch das Anfangswertproblem löst;

Betrachtet man nun die Differentialgleichung

$$y' = -2\sqrt{y}, \;\; y > 0, \qquad\qquad (*_1)$$

so ist i) aus 2.8 erfüllt und zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[$ gibt es genau eine Lösung von $(*_1)$ mit $y(x_0) = y_0$. Wir trennen die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -2\sqrt{y} \\
\int y^{-\frac{1}{2}}\, dy &= \int -2\, dx \\
\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} &= -2x + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\
y &= \left(\frac{-2x+c}{2}\right)^2 = \left(-x + \frac{c}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung von $(*_1)$

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(-x + \frac{c}{2}\right)^2, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

wobei das maximale Lösungsintervall alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$-2x + c = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} > 0 \iff -2x + c > 0 \iff 2x < c \iff x < \frac{c}{2}$$

enthält. Damit ist $D_\varphi = \left]-\infty, \frac{c}{2}\right[$.

Diese maximalen Lösungen von $(*_1)$ sind jedoch keine **maximalen** Lösungen von $(*)$, denn jedes dieser φ läßt sich durch $\varphi(x) = 0$ für $x \geq \frac{c}{2}$ zu einer differenzierbaren Funktion (wieder mit φ bezeichnet) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, welche auch Lösung von $(*)$ ist.

Die allgemeine Lösung von $(*)$, besteht also aus den Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0,$$

und

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \left(-x + \frac{c}{2}\right)^2 & , \text{ für } x < \frac{c}{2} \\ 0 & , \text{ für } x \geq \frac{c}{2} \end{cases},$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Dabei sind alle Funktionen mit $c \leq 2$ Lösungen des gestellten AWP.

3. a) Die rechte Seite der DGL

$$y' = x^2(y - x)^2 + 1 \qquad (*)$$

ist von der Form

$$f(x, y) = x^2(y - x)^2 + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

f ist stetig und (insbesondere) nach y partiell differenzierbar mit

$$\partial_2 f(x, y) = x^2 \cdot 2(y - x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Diese partielle Ableitung ist stetig, also ist f nach y stetig partiell differenzierbar. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (2.11 b)) ist das gegebene AWP somit eindeutig lösbar.

b) Ist $\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des AWP, so ist $\varphi'(x) = x^2(y - x)^2 + 1 > 0$ für alle $x \in D_\varphi$; da $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, ist φ streng monoton wachsend.

c) Wir führen eine neue Funktion z ein mit

$$z(x) = y(x) - x.$$

Mit y ist auch z differenzierbar und es gilt $z' = y' - 1$ also

$$y' = x^2(y-x)^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z' = x^2 \cdot z^2.$$

Die DGL

$$z' = x^2 \cdot z^2 \qquad (+)$$

ist eine DGL mit getrennten Variablen und den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ h(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ g(z) = z^2;$$

ferner ist $y(0) = 1 \iff z(0) = 1$. Die Funktion h ist stetig differenzierbar, also gibt es nach Satz 2.8 genau eine (maximale) Lösung $\psi : D_\psi \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(0) = 1$. Die konstante Funktion

$$\psi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 0,$$

ist eine Lösung von $(+)$, und, da zwei verschiedene Lösungen keinen Punkt gemeinsam haben können, gilt für die Lösung ψ des AWP stets $\psi(x) > 0$ für alle $x \in D_\psi$. Wir lösen also die DGL

$$z' = x^2 \cdot z^2, \quad z > 0, \qquad (+_1),$$

trennen dazu die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= x^2 \cdot z^2 \\ \int \frac{1}{z^2}\, dz &= \int x^2\, dx \\ -\frac{1}{z} &= \frac{1}{3}x^3 + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\ z &= -\frac{1}{\frac{1}{3}x^3 + c} \end{aligned}$$

Mit $z(0) = 1$ ergibt sich $-\frac{1}{1} = \frac{1}{3}0^3 + c$, also $c = -1$.
Eine Lösung des AWP $(+_1)$ mit $z(0) = 1$ ist damit

$$\psi : D_\psi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = -\frac{1}{\frac{1}{3}x^3 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^3},$$

wobei $D_\psi =]-\infty, \sqrt[3]{3}\,[$ (beachte, daß $\psi(x) > 0$ für $x \in D_\psi$).
Damit ist

$$\varphi :]-\infty, \sqrt[3]{3}\,[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^3} + x,$$

Lösung des AWP

$$y' = x^2(y-x)^2 + 1, \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

4. a) Wir betrachten die homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0 \qquad (*_0)$$

(bitte beachten: die ursprüngliche Version der Aufgabe 4 enthielt den Druckfehler ... $-2y(x)$... statt ...$-2y'(x)$... !)
Wir zeigen durch Einsetzen, daß $\varphi_1(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, eine Lösung von $(*_0)$ ist:
Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^x \\ \varphi_1'(x) &= e^x \\ \varphi_1''(x) &= e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\varphi_1''(x) - 2\varphi_1'(x) + \varphi_1(x) = e^x - 2e^x + e^x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad \checkmark$$

Wir zeigen nun, ebenfalls durch Einsetzen, daß $\varphi_2(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$, eine Lösung von $(*_0)$ ist: Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= xe^x \\
\varphi_2'(x) &= e^x + xe^x \\
\varphi_2''(x) &= e^x + x^x + xe^x = 2e^x + xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\varphi_2''(x) - 2\varphi_2'(x) + \varphi_2(x) = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \checkmark$$

b) Wir zeigen durch Einsetzen, daß $\varphi_p(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$, eine Lösung von

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{2e^x}{x^3} \qquad (*)$$

ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_p(x) &= \frac{e^x}{x} \\
\varphi_p'(x) &= \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\
\varphi_p''(x) &= \frac{(1e^x + xe^x - e^x) \cdot x^2 \;-\; (xe^x - e^x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{xe^x \cdot x - 2(xe^x - e^x)}{x^3} \\
&= \frac{x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x}{x^3} \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi_p''(x) - 2\varphi_p'(x) + \varphi_p(x) &= \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x}{x^3} \;-\; 2\frac{xe^x - e^x}{x^2} \;+\; \frac{e^x}{x} \\
&= \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x \;-\; 2x(xe^x - e^x) \;+\; x^2e^x}{x^3} \\
&= \frac{2e^x}{x^3} \quad \forall\, x > 0 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

c) Da es sich bei φ_1, φ_2 aus a) um ein Fundamentalsystem von $(*_0)$ handelt (denn φ_1, φ_2 sind linear unabhängig und $(*_0)$ ist eine DGL 2. Ordnung), ist die allgemeine Lösung von $(*)$

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + \frac{e^x}{x}, \quad x > 0, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es ist dann

$$\varphi'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 xe^x + \frac{xe^x - e^x}{x^2}, \quad x > 0.$$

Wir bestimmen nun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß für φ gilt $\varphi(1) = 0$ und $\varphi'(1) = 0$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varphi(1) = 0 \;&:\quad c_1 e + c_2 e + e = 0 &&\iff c_1 e + c_2 e = -e \\
\varphi'(1) = 0 \;&:\quad c_1 e + c_2 e + c_2 e + 0 = 0 &&\iff c_1 e + 2c_2 e = 0.
\end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem in c_1, c_2 hat die (eindeutig bestimmte) Lösung $c_2 = 1,\ c_1 = -2$, also ist die Lösung φ des gegebenen AWP

$$\varphi(x) = -2e^x + xe^x + \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$